Duração, convexidade e imunização

Gyorgy Varga

Introdução

Um instrumento muito útil na avaliação de títulos de renda fixa é a medida de comprimento de tempo conhecida como *duration*, aqui traduzida como duração. Além da simples avaliação da maturidade de um título, ou de uma carteira de títulos, essa medida permite avaliar a sensibilidade do valor de um título (ou carteira de títulos) a variações na taxa de juro. O efeito de segunda ordem da taxa de juro sobre o valor do título (ou carteira) é conhecido como convexidade e também costuma ser discutido nesse contrato. Uma extensão natural do modelo de duração é a tentativa de ajustar fluxos de caixa variados, de modo que eles se auto-anulem. Esse procedimento é conhecido como imunização.

A seguir, serão expostos cada um desses conceitos e a aplicação desse modelo à administração de um fundo de renda fixa.

Duração

Definição

A medida de comprimento de tempo de um título (ou títulos) conhecida como duração foi proposta pela primeira vez por Frederick R. Macaulay, em 1938. Macaulay mostrou que o prazo do título até seu vencimento era uma medida inadequada do elemento tempo contido num título, já que poderia estar omitindo informações fundamentais sobre algum pagamento anterior ao vencimento do título. Para contornar esse problema, a medida proposta foi a seguinte:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{F_t . t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t}} \qquad (1)$$

onde:
D = duração do título (ou carteira de títulos) com o fluxo de pagamento (Ft);
F_t = pagamento futuro na data t;
i = taxa de juro efetiva diária (dia útil);
n = número total de dias;
t = prazo a decorrer em dias úteis.

A relação (1) pode ser transformada na relação (2), onde fica evidente que se trata de uma ponderação do prazo de cada pagamento pelo seu valor atual.

$$D = \frac{\frac{F_1}{(1+i)}}{V} \times 1 + \frac{\frac{F_2}{(1+i)^2}}{V} \times 2 + \ldots + \frac{\frac{F_n}{(1+i)^n}}{V} \times n = w_1 \times 1 + w_2 \times 2 + \ldots + w_n \times n \qquad (2)$$

onde: $V = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i)^t}$ é o valor atual do título (ou carteira);

$w_t = \frac{\frac{F_t}{(1+i)^t}}{V}$ é o fator de ponderação na data t

Exemplo 1

Supondo-se uma taxa de juro diária constante igual a 1% e cinco títulos prefixados com valor final e prazo dados na Tabela 1.

Tabela 1

Título	Prazo (úteis)	Valor final
A	5	5.000.000
B	7	3.000.000
C	15	4.000.000
D	17	4.000.000
E	21	5.000.000

O valor atual dessa carteira é:

$$V = \frac{5.000.000}{(1,01)^5} + \frac{3.000.000}{(1,01)^7} + \frac{4.000.000}{(1,01)^{15}} + \frac{4.000.000}{(1,01)^{17}} + \frac{5.000.000}{(1,01)^{21}}$$

$$= 4.757.328, + 2.798.154, + 3.445.398, + 3.377.509, + 4.057.151, = 18.435.541$$

Na relação (2), a duração é:

$$D = \frac{4.757.328}{18.435.541} x5 + \frac{2.798.154}{18.435.541} x7 + \frac{3.445.398}{18.435.541} x15 + \frac{3.377.510}{18.435.541} x \frac{4.057.151}{18.435.541} x21 =$$

$$= 0,258 \times 5 + 0,153 \times 7 + 0,187 \times 15 + 0,183 \times 17 + 0,220 \times 21 = 12,892 \text{ dias úteis}.$$

Equivalência entre uma carteira e um título

A duração dessa carteira é de 12,892 dias úteis. Se a taxa de juro é constante, então a carteira acima equivale a um título com valor atual de CR$18.435.541, e prazo de 12,892 dias.

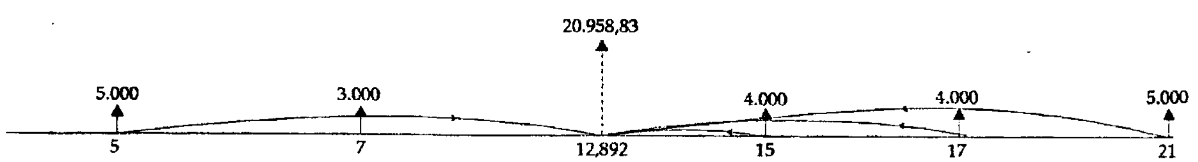
Exemplo 2

Aplicando a quantia de CR$18.435.541 em um título de 12,892 dias de duração, seu valor final será:

$$18.435.541\ (1,01)^{12,892} = 20.958.830.$$

Aplicando-se o valor recebido em cada título da carteira da Tabela 1 até a data 12,892 e calculando-se o valor atual dos títulos restantes, conforme representado no Gráfico 1, o mesmo valor acima será obtido.

Gráfico 1



$$5.000.000(1,01)^{7,892} + 3.000.000(1,01)^{5,892} + \frac{4.000.000}{(1,01)^{2,108}} + \frac{4.000.000}{(1,01)^{4,108}} + \frac{5.000.000}{(1,01)^{8,108}} = 20.958.830$$

Relação taxa de juro e duração

O efeito da taxa de juro sobre a duração de uma carteira é inversamente proporcional. Quanto maior a taxa de juro, menor a duração e *vice-versa*. Com base nos dados do exemplo 1, tem-se na Tabela 2, o cálculo da duração para vários valores de taxa de juro. Assim, se essa taxa aumenta para 1,1% ao dia, a duração cai de 12,89 para 12,85 úteis.

Outro efeito interessante que pode ser observado na Tabela 2 é a assimetria na variação do valor da carteira em relação à variação na taxa de juro. Se a taxa cai para 0,9% (cai 10%), o valor da carteira aumenta 1,287%; se ela sobe para 1,1% (sobe 10%), o valor da carteira cai 1,265%. Assim, ganha-se mais na queda da taxa de juro do que se perde na alta.

Tabela 2

Taxa	Valor atual	Duração
0,50%	19.663.218	13,09
0,60%	19.409.294	13,05
0,70%	19.159.647	13,01
0,80%	18.914.193	12,97
0,90%	18.672.851	12,93
1,00%	18.435.541	12,89
1,10%	18.202.187	12,85
1,20%	17.972.711	12,81
1,30%	17.747.039	12,77
1,40%	17.525.099	12,73
1,50%	17.306.819	12,70

Sensibilidade do valor da carteira à taxa de juro

Há uma relação muito próxima entre duração, valor atual e taxa de juro, que pode ser formalizada muito bem diferenciando-se a função valor atual da carteira (V) em relação à taxa de juro:

$$\frac{dV}{di} = \frac{1}{(1+i)} \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t\, t}{(1+\mathrm{i})^t}$$

Dividindo-se ambos os lados por V, tem-se:

$$\frac{dV}{Vdi} = -\frac{1}{(1+i)V} \times \sum_{j=1}^{n} \frac{F_t\, t}{(1+\mathrm{i})^y} = -\frac{D}{(1+i)}$$

ou,

$$\frac{dV}{V} = -D \times \frac{d_i}{(1+i)}$$

e com menor rigor, chega-se a:

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = -D \times \frac{\Delta i}{(1+i)}} \tag{3}$$

A variação percentual no valor da carteira é proporcional à duração vezes a variação percentual da taxa de juro. Se o investidor espera alta na taxa de juro, seu ganho será maior quanto menor for a duração da carteira e *vice-versa.*

Exemplo 3

Com base nos resultados do exemplo 1, tem-se para i = 1% uma duração de 12,892. Se a taxa de juro aumentar para 1,1%, o valor da carteira deve diminuir num percentual dado pela equação 3:

$$\Delta V = -12{,}892 x \frac{0{,}001}{(1{,}01)} = -0{,}012764$$

ou seja, deve diminuir em 1,276%. Pela Tabela 2 pode-se confirmar essa variação no valor da carteira.

valor .... CR$18.435.541;
(—) 1,2764% .... -CR$235.311;
valor após aumento na taxa de juro .... CR$18.200.229.

A duração permite avaliar, aproximadamente, o impacto de variações da taxa de juro sobre o valor da carteira com base apenas em seu valor. Essa propriedade é muito útil, à medida que facilita a avaliação da exposição ao risco da taxa de juro.

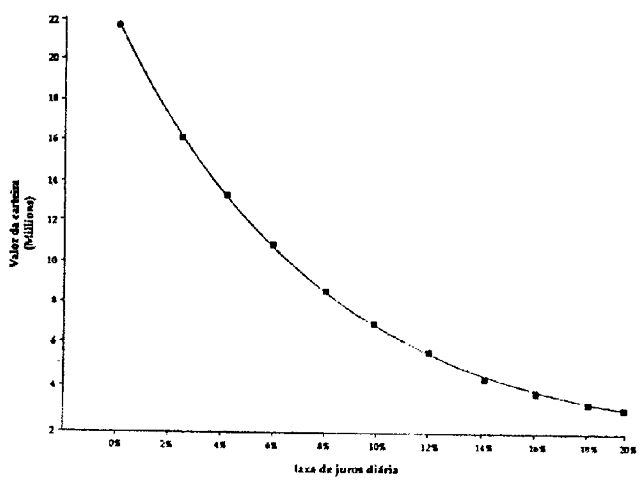
Convexidade

A variação da taxa de juro afeta o valor de uma carteira, mas o efeito sobre esse valor não é linear. Quanto maior a taxa de juro, menor o valor da carteira, e essa queda no valor forma uma curva convexa. O grau de convexidade pode ser maior ou menor, dependendo de:

1. dispersão dos vencimentos em relação à duração;
2. diferença das taxas de juro em função dos diferentes prazos.

Com base nos dados do exemplo 1, o valor da carteira pode ser escrito como função da taxa de juro, conforme apresentado no Gráfico 2.

Gráfico 2



A definição matemática de convexidade é:

$$C(i) = \frac{V''}{V}$$

onde V" é a segunda derivada do valor atual, em relação à taxa de juro.

$$C(i) = \frac{1}{(1+i)^2}\left[\frac{\sum_{t=i}^{n}\frac{F_t \times (t^2+t)}{(1+i)^t}}{\sum_{t=i}^{n}\frac{F_t}{(1+i)^t}}\right]$$

No caso de taxas de juro diárias diferentes, a relação acima deve ser escrita como:

$$C(i) = \frac{1}{V}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{F_t(t^2+t)}{(1+i_t)^{t+2}}\right] \tag{4}$$

onde i_t é a taxa de juro do dia t.

Se a taxa de juro diária é sempre a mesma, pode-se trabalhar com a seguinte simplificação:

$$C(i) = \frac{1}{(1+i)^2}\sum_{t=1}^{n} w_t \times (t^2+t) \tag{5}$$

Exemplo 4

No caso da carteira da Tabela 1, a convexidade é igual a:

$$C_i = \frac{1}{(1,01)^2}\left[0,258x(5^2+5)+0,153(7^2+7)+0,187(15^2+15)+0,183(17^2+17)+0,220(21^2+21)\right] = 214,51$$

Para comparar, pode-se imaginar uma segunda carteira com igual duração (12,89), mas menos dispersão, denominada carteira 2.

Título	Prazo (úteis)	Valor final
F	12	9.000.000
G	13	5.059.682
H	14	6.900.000

$$\text{Valor atual} = \frac{9.000.000}{(1,01)^{12}} + \frac{5.059.682}{(1,01)^{13}} + \frac{6.900.000}{(1,01)^{14}} = 18.435.541$$

$$\text{Duração} = \frac{\frac{9.000.000}{(1,01)^{12}} \times 12}{18.435.541} + \frac{\frac{5.059.682}{(1,01)^{13}} \times 13}{18.435.541} + \frac{\frac{6.900.000}{(1,01)^{14}} \times 14}{18.435.541} = 12,89$$

Nesse exemplo a convexidade é:

$$\text{Convexidade} = \frac{1}{(1,01)^2}\left[\frac{\frac{9.000.000}{(1,01)^{12}}(12^2+12)}{18.435.541} + \frac{\frac{5.059.682}{(1,01)^{13}}(13^2+13)}{18.435.541} + \frac{\frac{6.900.000}{(1,01)^{14}}(14^2+14)}{18.435.541}\right] = 176.31$$

A Tabela 3 demonstra a utilidade do conceito de convexidade, ou seja, a capacidade de verificar qual a melhor carteira.

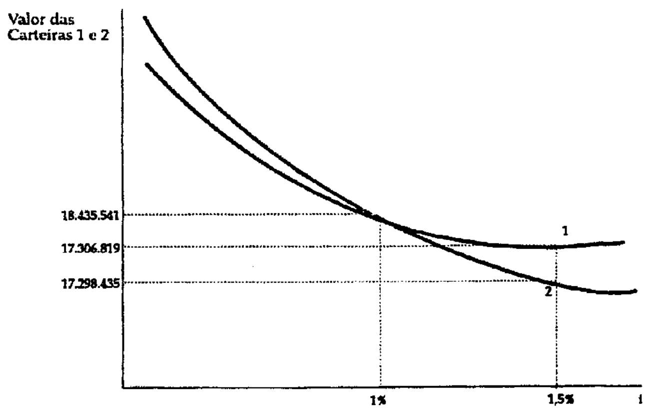
O sentido desse número está em comparar a convexidade de duas carteiras diferentes que tenham mesmo valor atual e mesma duração, pois, nesse caso, o conjunto com maior convexidade vale mais, já que, para qualquer variação da taxa de juro, a carteira com maior convexidade terá valor superior ao da carteira com menor convexidade. O Gráfico 3 apresenta as primeira e segunda carteiras, ambas com mesmo valor atual e duração à taxa de juro de 1%. Se a convexidade da 1 é maior que a da 2. Então, para qualquer variação em i, o valor da carteira 1 será maior que a da 2.

Na Tabela 3 pode-se comprovar que, para igual valor atual e duração, quanto maior a convexidade, melhor a carteira.

Tabela 3

Taxa	Valor atual 1	Valor atual 2	(1)-(2)
0,50%	19.663.218	19.653.819	9.399
0,60%	19.409.294	19.403.365	5.929
0,70%	19.159.647	19.156.361	3.286
0,80%	18.914.193	18.912.755	1.438
0,90%	18.672.851	18.672.499	352
1,00%	18.435.541	18.435.541	0
1,10%	18.202.187	18.201.834	353
1,20%	17.972.711	17.971.329	1.382
1,30%	17.747.039	17.743.979	3.060
1,40%	17.525.099	17.519.739	5.360
1,50%	17.306.819	17.298.561	8.257

Gráfico 3



A convexidade pode ser traduzida em valor para uma carteira. Na verdade, a variação do valor da carteira deve levar em conta a convexidade, segundo a seguinte relação:

$$\boxed{\frac{\Delta V}{V} = -D \times \frac{\Delta i}{(1+i)} + \frac{1}{2} C(\Delta i)^2} \qquad (6)$$

Essa relação nada mais é do que a relação (3), acrescida do efeito da convexidade.

Exemplo 5

Baseando-se nos dados dos exemplos 3 e 4, veja como fica a variação total do valor da carteira 1:

$$\frac{\Delta V}{V} = -12,892x\frac{0,001}{(1.01)} + \frac{1}{2}214,51(0,001)^2 = -0,012764356 + 0,000107255 = -0,012657$$

Da Tabela 2:

valor anterior .... = CR\$18.435.541;
(—) 1,2657% .... = -CR\$233.338;
valor após aumento na taxa.............................. = CR\$18.202.202.

Conforme foi mostrado no exemplo 3, a duração permitiu avaliar o impacto da variação da taxa de juro sobre o valor da carteira, mas ao se utilizar também a convexidade, essa avaliação fica mais exata.

Duração com taxa de juro variável

A duração com taxa de juro não constante é um procedimento devido a Fischer e Weil (1971), que simplesmente considera a taxa de juro de cada período. Assim sendo, a relação (1) deve ser escrita como:

$$D = \frac{\frac{F_1}{(1+i_1)}}{V} \times 1 + \frac{\frac{F_2}{(1+i_1)(1+i_2)}}{V} x2 + \ldots + \frac{\frac{F_n}{(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n)}}{V} \times n =. \qquad (7)$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{t=i}^{n} \frac{F_t \times t}{\displaystyle\prod_{k=i}^{j} (1+i_k)}}{V} \qquad (8)$$

onde:
i_k = taxa de juro efetiva do período k;
V = valor atual da carteira.

A única diferença consiste em considerar taxas de juro diferenciadas.

Exemplo 6

Com base nas taxas de juro diárias dadas na Tabela 4, pode-se avaliar a duração da carteira apresentada no exemplo 1.

Tabela 4

Dias	Taxa de juro diária
1, 2, 3, 4 e 5	1%
6 e 7	1,1%
8, 9, 10, 11 e 12	1,2%
13, 14, 15, 16 e 17	1,3%
18, 19, 20 e 21	1,2%

$$V = \frac{5.000.000}{(1,01)^5} + \frac{3.000.000}{(1,01)^5(1.011)^2} + \frac{4.000.000}{(1,01)^5(1,011)^2(1,012)^5(1,013)^3} + \frac{4.000.000}{(1,01)^5(1,011)^2(1,012)^5(1,013)^5} +$$

$$+ \frac{5.000.000}{(1,01)^5(1,011)^2(1,012)^9(1,013)^5} = 4.757.328, +2.792.621, +3.374.581, +3.288.524, +3.919.124 = 18.132.178$$

$$D = \frac{4.757.328}{18.132.178} x5 + \frac{2.792.621}{18.132.178} x7 + \frac{3.374.581}{18.132.178} x15 + \frac{3.288.524}{18.132.178} x17 +$$

$$+ \frac{3.919.124}{18.132.178} x21 = 12,804$$

Imunização

Sem dúvida, essa é a aplicação mais importante do modelo de duração. Imunizar significa tornar o valor final de uma carteira de títulos insensível a variações da taxa de juro. Por exemplo, se um indivíduo tem uma dívida de CR$110,00 a pagar dentro de um mês, e a taxa de juro é de 10% ao mês, a compra de um título no valor de CR$100,00, que renda essa taxa de juro, imuniza a dívida. A carteira composta pelo título mais a dívida está imunizada e com valor final igual a zero.

No caso da carteira do exemplo 1, seu valor é de CR$18.435.541, e a duração é 12,982. Então, se essa carteira foi financiada com título de duração igual a 12,892, ela está imunizada.

No caso de ajuste de ativos e passivos de bancos, esse conceito é útil para compatibilizar prazos e avaliar o risco de variação da taxa de juro. O ideal, nesse último caso, é que ativo e passivo tenham mesma duração e convexidade, pois, sendo assim, qualquer que seja a taxa de juro o valor do ativo será igual ao do passivo, não gerando lucro ou prejuízo extraordinário quando a taxa de juro variar.

Se as taxas de juro são diariamente iguais, ou seja, a estrutura a termo é *flat*, e ocorrem apenas deslocamentos paralelos nessa estrutura, então a imunização é perfeita se as durações forem iguais.

Ocorre que a estrutura a termo das taxas de juro não é necessariamente *flat*, e deslocamentos nessa estrutura, provavelmente, irão destruir a imunização, devendo-se reimunizar a carteira com a adição/subtração de títulos a cada novo dia.

A imunização também pode ser feita com contratos futuros de taxa de juro, de modo que os procedimentos operacionais fiquem mais simples.

Administração de um fundo de renda fixa

Pode-se observar a aplicação dos conceitos anteriores a uma carteira fictícia, com a composição dada na Tabela 5.

Tabela 5

Título	Prazo (úteis)	Valor final	Taxa diária média
A	12	5.000.000.000	1%
B	13	4.000.000.000	1,02%
C	17	7.000.000.000	1,05%
D	21	3.000.000.000	1,07%

Da relação (8), obtem-se o seguinte valor para a duração:

$$\text{Valor atual (V)} = \frac{5.000.000.000}{(1,01)^{12}} + \frac{4.000.000.000}{(1,0102)^{13}} + \frac{7.000.000.000}{(1,0105)^{17}} + \frac{3.000.000.000}{(1,0107)^{21}} = 16.203.111.000$$

$$\text{Duração} = \frac{\frac{5.000.000.000}{(1,01)^{12}}}{16.203.111.000} x12 + \frac{\frac{4.000.000.000}{(1,0102)^{13}}}{16.203.111.000} x13 + \frac{\frac{7.000.000.000}{(1,0105)^{17}}}{16.203.111.000} x17 + \frac{\frac{3.000.000.000}{(1,0107)^{21}}}{16.203.111.000} x21 =$$

$$= 0,2723x12 + 0,2157x13 + 0,3627x17 + 0,1494x21 = 15,357$$

Da relação (4) obtem-se o seguinte valor para a convexidade:

$$C = \frac{1}{16.203.111.000}\left[\frac{5.000.000.000(12^2+12)}{(1,01)^{14}} + \frac{4.000.000.000(13^2+13)}{(1,0102)^{15}} + \right.$$

$$\left. + \frac{7.000.000.000(17^2+17)}{(1,0105)^{19}} + \frac{3.000.000.000(21^2+21)}{(1,0107)^{23}}\right] = 255,83$$

Bibliografia

FARO, CLOVIS DE. **Princípios e Aplicação do Cálculo Financeiro,** Livros Técnicos e Científicos Editora, 1990.

FISCHER, LAWRENCE & ROMAN, WEIL. "*Coping with the risk of Interest rate fluctuations: returns of bondholders from naive and optimal strategies*", **Journal of Business, 44, 1971.**

MACAULAY, FREDERICK. **Some theoretical problems suggested by movements of interest rates, bond yields, and stocks prices in the United States since 1856,** New York, National Bureau of Economics Research, 1938.

Gyorgy Varga *é diretor do Bankers Trust e professor da Faculdade de Economia e Administração da UFRJ.*