

TEORIA DE VALORES EXTREMOS PARA CÁLCULO DE VaR*

Luiz Alvares Rezende de Souza^{**} (lalvares@usp.br)

Marcos Eugênio da Silva^{***} (medsilva@usp.br)

Julho de 1999

Resumo

É conhecido o fato de que distribuições de retornos de séries financeiras costumam apresentar caudas mais pesadas do que as de uma distribuição normal. Contudo, as metodologias tradicionais de cálculo de Valor em Risco (VaR) em geral supõem normalidade, seja condicional ou não condicional, e acomodam mal as ocorrências extremas da distribuição dos retornos. O objetivo deste trabalho, motivado pelo período de sucessivas crises financeiras internacionais, é investigar a plausibilidade das hipóteses exigidas pelas metodologias tradicionais, e a influência que as características tipicamente encontradas em séries financeiras exercem sobre os modelos de cálculo de Valor em Risco mais utilizados. Mais ainda, investiga-se a possibilidade de se obter melhoria significativa do ponto de vista do controle de risco, através da utilização da Teoria do Valor Extremo. A metodologia é aplicada e comparada a duas séries financeiras reais: retornos de C-Bond e retornos de Telebrás. Os resultados indicam que a Teoria do Valor Extremo é mais indicada para a modelagem das caudas, a níveis de significância menores ou iguais a 1%, e que modelos do tipo GARCH desempenham melhor no interior da distribuição.

1 Introdução

Dadas as sucessivas crises por que vem passando o mercado financeiro internacional, começando com a crise no Leste Asiático (julho 1997), passando pela moratória Russa (outubro de 1998) e, mais recentemente, com a mudança do regime cambial brasileiro (janeiro de 1999), observa-se que algumas instituições financeiras incorreram em grandes perdas em cada um desses eventos. Infelizmente, algumas não sobreviveram para aprender com os próprios erros. Outras, de uma forma ou de outra, sentiram a necessidade de possuir um sistema adequado de controle de risco para prevenir catástrofes financeiras em momentos de crise. Cabe então perguntar qual seria o método mais adequado para controle de risco nessas situações extremas, que permitisse tanto um dimensionamento correto do risco envolvido na administração das suas posições de mercado, quanto a determinação das exigências de capital que deveriam ser requeridas das instituições financeiras.

* Os autores agradecem os comentários dos Professores Paulo Picchetti, Pedro Luiz Valls Pereira, e José Carlos Souza Santos ao trabalho de dissertação de mestrado do primeiro autor, orientado pelo segundo, que deu origem a este artigo.

** Mestre pelo IPE-USP. Agradece o financiamento parcial concedido pela CAPES.

*** Professor do Departamento de Economia da FEA-USP.

Neste artigo será proposta uma modelagem de Value-at-Risk (VaR) baseada na Teoria do Valor Extremo. Seus resultados serão avaliados contra as metodologias tradicionais, a saber: intervalo de confiança baseado em normalidade não-condicional, simulação histórica, EWMA (*Riskmetrics*), GARCH com distribuição normal, e GARCH com distribuição t-Student.

Do ponto de vista do controle de risco, pode-se definir duas categorias, ou objetivos básicos, para modelos de valor em risco: (a) *uma medida de VaR para as perdas mais frequentes, ou diárias*. Nesse caso, objetiva-se níveis de significância em torno de 5% ou 2.5%. Trata-se das situações ditas “normais”, onde seria desejável um modelo que respondesse rapidamente à percepção de risco do próprio mercado. (b) *Uma medida de VaR para as perdas mais raras, ou de situações de “stress”*. Seria o caso de medidas de VaR(1%) ou para níveis de significância ainda menores do tipo VaR(0.1%).

É para o tipo de controle de risco exigido em (b) que o método de valor extremo discutido nesse artigo melhor se aplica, por levar em consideração a informação de longo prazo contida na amostra.. Além disso, alguns trabalhos¹ defendem que as exigências de capital para instituições financeiras impostas pelo acordo da Basiléia são excessivamente conservadoras e desincentivam a utilização de modelos de cálculo de *value-at-risk* mais precisos.

O artigo está organizado da seguinte forma: a esta introdução segue-se uma seção que descreve os conceitos básicos de *Value-at-Risk* e os modelos tradicionais mais utilizados, bem como as hipóteses necessárias para que sejam aplicáveis. Na seção 3 as duas séries financeiras que serão utilizadas no trabalho são descritas em detalhe, e seus fatos estilizados caracterizados (retornos de C-Bond, e retornos de Telebrás-PN). Na seção 4, expõe-se a Teoria do Valor Extremo, e sua aplicação para o cálculo de VaR. Por fim, na seção 5 são finalmente aplicados os diferentes métodos de estimação de valor em risco discutidos às duas séries financeiras descritas na seção 3. Uma sexta e última seção é reservada às conclusões.

2 Metodologias tradicionais para o Cálculo de VaR

2.1 Definição de Valor em Risco (Value-at-Risk)

Define-se genericamente o Valor em Risco (*value-at-risk*) VaR_t , de uma carteira de valor P_t , no período t , como:

$$\Pr\{\Delta\Pi_t \leq VaR_t\} = \alpha\% \quad \text{onde: } \Delta P_t = \text{variação no valor da carteira de preço } \Pi_t \\ \alpha\% = \text{nível de significância}$$

Isto é, o VaR é a perda máxima esperada da carteira, a um nível de significância de $\alpha\%$ (ou nível de confiança de $1-\alpha\%$), dentro de um horizonte de tempo determinado. É importante observar que se trata de uma medida monetária, dado que a variável aleatória, nesse caso, é a variação de valor da carteira.

Definindo os retornos da carteira Π como $r_t = \frac{\Pi_t - \Pi_{t-1}}{\Pi_{t-1}}$, pode-se trabalhar com o VaR em termos da distribuição dos retornos da carteira, isto é:

¹ Ver, por exemplo, Danielsson & Hartmann 1998.

$$\Pr\left\{\left(\frac{\Delta\Pi_t}{\Pi_{t-1}}\right)\Pi_{t-1} \leq VaR_t\right\} = \mathbf{a}\% \Rightarrow \Pr\{r_t \leq VaR_t \Pi_{t-1}^{-1}\} = \mathbf{a}\%$$

E pode-se definir um novo VaR_t^* em termos de retornos²: $\Pr\{r_t \leq VaR_t^*\} = \mathbf{a}\%$. O VaR monetário pode ser facilmente obtido como: $VaR_t = VaR_t^* \Pi_{t-1}$.

2.2 Intervalo de Confiança baseado em normalidade não condicional

Impondo-se a hipótese de que os retornos sejam normais e i.i.d. (independente e identicamente distribuídos), pode-se calcular o VaR de $\alpha\%$ como: $VaR(\mathbf{a}\%) = -\Pi_{t-1} Z_{1-\mathbf{a}\%} \mathbf{s}$, onde $Z_{1-\alpha\%}$ é o quantil de uma normal padrão ($z_{95\%} = 1.65$, $z_{99\%} = 2.33$). Nesse caso, para uma amostra (ou janela) de T observações, o estimador de \mathbf{s} é $\hat{\mathbf{s}} = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (r_i - \bar{r})^2}$, onde $\bar{r} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i$. Note que, nesse caso, o VaR é dado pelo limite inferior do intervalo de confiança unicaudal para o retorno da carteira ao assumir-se³ que $r_t \sim N(\bar{r}, \hat{\mathbf{s}}^2)$.

2.3 Simulação Histórica

Supondo-se que a distribuição dos retornos seja não-padrão, e que não se queira fazer hipóteses adicionais sobre ela, pode-se utilizar a própria distribuição dos retornos realizados da carteira, a fim de se calcular não-parametricamente o quantil correspondente ao nível de significância do VaR de $\mathbf{a}\%$ desejado.

Isto é, dada uma amostra de retornos $\mathbf{c}_T = \{X_1, \dots, X_T\}$, ordenam-se as observações⁴ $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_T$ e toma-se o estimador de $\hat{X}_{\mathbf{a}\%} = \frac{X_{[\mathbf{a}\%T]} + X_{[\mathbf{a}\%T+1]}}{2}$ para T par⁵. A partir da estimativa do quantil empírico $X_{\alpha\%}$ dos retornos, é possível contruir-se o $VaR(\mathbf{a}\%)$ como $VaR(\mathbf{a}\%) = \Pi_{t-1} \hat{X}_{\mathbf{a}\%}$.

A idéia é se utilizar a própria distribuição empírica dos retornos passados da carteira ou ativo, com o argumento de que ela reproduz da melhor maneira possível a verdadeira distribuição. O método é robusto a distribuições de caudas pesadas, mas baseia-se numa única realização do processo gerador dos dados (uma única trajetória de preços é observada na prática). É necessária a hipótese de retornos i.i.d., exigindo-se que a distribuição permaneça estável ao longo do tempo. Além disso, é importante observar que uma amostra de tamanho N não tem nada a dizer sobre a probabilidade de perdas maiores do que $1/N$.

² Será esse VaR, para retornos, que será estimado na seção empírica.

³ Existe a possibilidade de se considerar distribuições alternativas.

⁴ As observações ordenadas desta maneira recebem o nome de *estatísticas de ordem*. A definição formal encontra-se na seção 4.1.1.

⁵ Os colchetes $[\]$ definem a parte inteira da operação. $X_{[\mathbf{a}\%T]}$, portanto, refere-se ao retorno que ocupa a posição correspondente a $\mathbf{a}\%$ das observações, numa amostra ordenada de maneira crescente. Para T ímpar utiliza-se $\hat{X}_{\mathbf{a}\%} = X_{[\mathbf{a}\%T+1]}$.

2.4 Modelos da Família ARCH

No caso de não ser válida a hipótese de normalidade não condicional, uma possibilidade é se modelar a distribuição condicional dos retornos. A abordagem inicial se deve a Bollerslev, e vem sendo desenvolvida desde o início dos anos 80, com inúmeras aplicações para séries financeiras, e uma grande quantidade de extensões. Uma boa resenha pode ser encontrada em *Bollerslev et alii (1992)*. O sucesso dessa classe de modelos se deve, em grande parte, ao fato de tratar diretamente duas das principais características recorrentemente observadas em dados financeiros: caudas pesadas e dependência temporal do segundo momento condicional.

Para o cálculo de VaR, o que em geral se faz é estimar um modelo adequado da família ARCH para prever a volatilidade condicional $\hat{\mathbf{S}}_{t|t-1}$ e, a partir daí, construir-se o intervalo de confiança, como em 2.3, só que com base na distribuição condicional dos retornos⁶. A modelagem da volatilidade condicional contorna vários dos problemas apontados nas abordagens anteriores, dando maior peso às observações mais recentes. Contudo, necessita de hipóteses tanto sobre a distribuição condicional dos retornos, em geral assumida como normal⁷, como sobre a especificação dinâmica seguida pela variância. A seguir, as especificações mais tradicionais utilizadas para o cálculo de *value-at-risk*.

2.4.1 GARCH com distribuição Normal e t-Student

Supondo-se que os retornos tenham média nula e sejam não autocorrelacionados⁸, um modelo GARCH(p,q) (*Generalized Autoregressive Conditional Heterokedasticity*) com inovações gaussianas pode ser escrito como:

$$r_t = \mathbf{s}_t \mathbf{e}_t, \quad \mathbf{e}_t \sim N(0,1)$$

$$\mathbf{s}_t^2 = \mathbf{v} + \sum_{i=1}^q \mathbf{a}_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j \mathbf{s}_{t-j}^2, \quad \mathbf{v} > 0, \quad \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j \geq 0, \quad \sum_{i=1}^q \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^p \mathbf{b}_j < 1$$

E pode ser estimado através da maximização da log-verossimilhança, ao se impor as restrições sobre os parâmetros da variância condicional⁹.

Tecnicamente a escolha da ordem das defasagens p e q deveria ser feita caso a caso através da minimização de um critério de informação como o BIC¹⁰ (*Bayesian Information Criterion*). Contudo, na prática, uma boa escolha para séries financeiras acaba sendo $p = 1$ e $q = 1$. Esse resultado é recorrente na literatura. Todas as estimações de VaR com base em modelos GARCH feitas neste trabalho, e apresentadas na seção 5, foram feitas condicionais aos valores de $p = 1$ e $q = 1$. Isso se

⁶ Para isso, como já citado anteriormente, basta substituir a estimativa do desvio-padrão não condicional $\hat{\mathbf{S}}$ da seção 2.3, pelo $\hat{\mathbf{S}}_{t|t-1}$ dado pelo modelo escolhido da família ARCH.

⁷ Pode-se assumir uma *t-student*, e estimar seu número de graus de liberdade conjuntamente por máxima verossimilhança, ou ainda utilizar uma distribuição de erros generalizada (*GED*), que possui a normal e a *t* como casos particulares.

⁸ Em caso contrário pode-se especificar uma estrutura ARMA para os retornos, e estimá-la conjuntamente com a estrutura GARCH por máxima-verossimilhança.

⁹ As restrições garantem a estacionariedade do processo, e que tanto variância condicional, como não condicional, sejam finitas e estritamente positivas.

¹⁰ $BIC = -\frac{2}{T}(\Psi(\mathbf{q}^*) - k \ln T)$, onde $\Psi(\mathbf{q}^*)$ é o valor da log-verossimilhança avaliada no ponto de máximo, T é o número de observações utilizadas na estimação, e k o número de parâmetros.

justifica pelo fato de facilitar uma automatização do processo na implementação computacional, e por ser essa a especificação mais adequada na grande maioria dos casos¹¹.

Como nem sempre os modelos GARCH condicionalmente gaussianos conseguem explicar todo o excesso de curtose encontrado nas séries financeiras, distribuições alternativas foram propostas para as inovações dos retornos. A mais comum, é supor-se que os erros seguem distribuição *t-Student*, com ν graus de liberdade, portanto, que: $\mathbf{e}_t \sim t(\nu)$

Esse modelo pode, da mesma forma, ser estimado por máxima verossimilhança, impondo-se as restrições usuais, e com o parâmetro do número de graus de liberdade da distribuição t sendo estimado conjuntamente.

2.4.2 Metodologia RiskMetrics: o EWMA

Um dos procedimentos mais comumente utilizados no mercado é o sugerido pela metodologia *RiskMetrics* do JPMorgan. Trata-se de modelar a volatilidade dos ativos como um EWMA (*Exponentially Weighted Moving Average*), onde:

$$\mathbf{s}_t^2 = (1 - \mathbf{I})r_{t-1}^2 + \mathbf{I}\mathbf{s}_{t-1}^2$$

que pode ser visto como o caso de um GARCH(1,1) degenerado, sem o intercepto da volatilidade, e onde os parâmetros \mathbf{a} e \mathbf{b} somam 1 (IGARCH). O parâmetro \mathbf{I} pode ser facilmente estimado pela minimização do erro quadrático médio entre o quadrados dos retornos e a variância condicional dada pelo modelo

3 Descrição das Séries

Tendo em vista as hipóteses necessárias para que cada uma das metodologias descritas na seção anterior se mostre apropriada, cabe estudar os fatos estilizados observados nas séries a serem trabalhadas. As questões fundamentais investigadas são normalidade e independência.

3.1 Série de Retornos de C-Bond

O C-Bond é o principal título da dívida externa brasileira, e um dos mais líquidos entre os *braddies* sendo negociados no mercado internacional. Na figura 1 encontra-se o gráfico dos preços e retornos¹² diários da série de C-Bond utilizada. Os preços são dados em percentual sobre o valor de face do título, e os retornos são calculados com referência a esses preços. O período cobre de 2/8/94 a 26/2/1999, totalizando 1121 observações. A fonte dos dados é a empresa *Enfoque Gráfico Sistemas*.

¹¹ De fato o uso de especificações dinâmicas mais ricas permitidas pela escolha de ordens mais elevadas de modelos GARCH produz uma diferença muito pouco significativa para as séries de desvio-padrão condicional extraídas segundo modelos alternativos. A implicação desse fato para o cálculo de VaR é que as estimativas de valor em risco dadas por modelos com p e q diferentes de 1, deve ser muito próxima da dada por um GARCH(1,1). Isso pode ser facilmente observável sobrepondo-se as séries de VaR de modelos GARCH(p,q) alternativos num único gráfico.

¹² Ao longo de todo este trabalho, os retornos utilizados serão os discretos, calculados como $r_t = \frac{\Pi_t - \Pi_{t-1}}{\Pi_{t-1}}$. Isto se deve ao interesse específico do problema de *Value-at-Risk* que é modelar a distribuição das perdas $\Delta\Pi_t$. Neste caso, basta modelar a distribuição de $r_t | \Pi_{t-1}$. 5.6

Série de Cbond

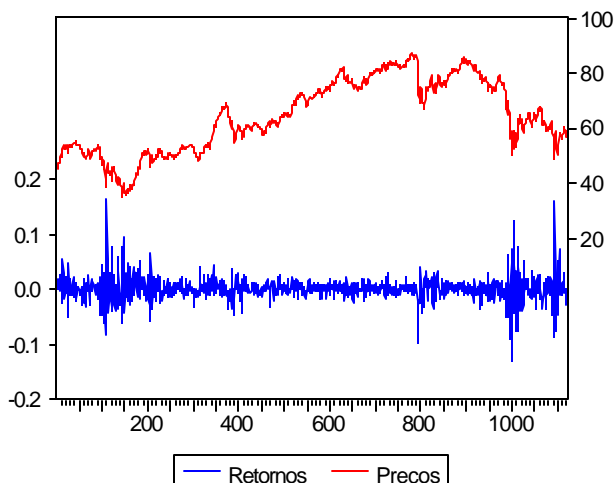


Figura 1

Série de Telebrás

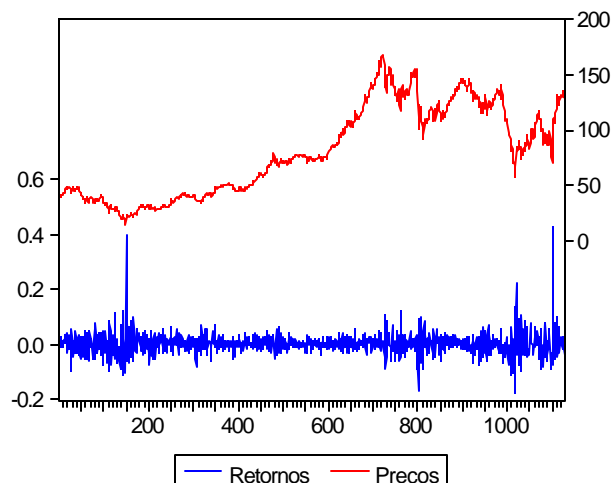


Figura 2

3.2 Série de Retornos de Telebrás

A série utilizada constitui-se de 1128 preços de fechamento de Telebrás PN, no período compreendido entre 1/8/1994 e 26/2/1999. Dias após a privatização do Sistema Telebrás, as ações das 13 empresas cindidas foram separadas na Bovespa. A partir de então passaram a ser negociados os Recibos de Telebrás, constituídos por uma cesta com os papéis das 13 empresas vendidas. A série utilizada é a de Telebrás PN (TEL4) até 21/9/1998 (observação 1023), encaixada à série de Recibos de Telebrás (RCTB40) daí em diante. Na figura 2 encontra-se o gráfico dos preços e retornos utilizados. Os dados foram adquiridos da *Enfoque Gráfico Sistemas*.

	<i>RETORNOS DE C-BOND</i>	<i>RETORNOS DE TELEBRÁS</i>
Média	0.000403	0.001765
Mediana	0.000000	0.002002
Desvio-Padrão	0.020237	0.038355
Mínimo	-0.130152	-0.175632
Máximo	0.163399	0.424586
Assimetria	0.6443 [0.0000]	2.134822 [0.0000]
Exc.de Curtose	12.2086 [0.0000]	24.295451 [0.0000]
Jarque-Bera¹³	2290.68 [0.0000]	28599.44 [0.0000]

Tabela 1: Estatísticas Descritivas das Séries de Retornos

Nota: *p-values* das estatísticas qui-quadrado de teste entre colchetes

3.3 Análise das Séries de Retornos

A tabela 1 mostra algumas estatísticas descritivas para ambas as séries. Verifica-se inicialmente que a hipótese de média nula para os retornos é razoável, dado que seu desvio-padrão é 50 vezes maior do

¹³ O valor crítico da estatística qui-quadrado é 5.99. Outros teste de normalidade como o Doornik-Hansen e Bowman-Shenton também rejeitam fortemente a hipótese de normalidade.

que a média para o C-Bond, e 20 vezes para Telebrás. Rejeitam-se as hipóteses de excesso de curtose igual a zero e de não assimetria para as duas séries. Essas estatísticas poderiam estar contaminados pela presença de *outliers*, principalmente para a série de Telebrás. Checou-se, eliminando-se alguns desses eventos extremos, e refazendo os testes. Ainda assim os resultados foram de rejeição da hipótese de normalidade.

Com relação à hipótese de independência, pode-se observar na figura 3 as funções de autocorrelação amostral dos retornos e quadrados dos retornos das duas séries.

Tanto para os retornos de C-Bond, quanto para os de Telebrás, observa-se que o correlograma apresenta alguns picos fora do intervalo de confiança¹⁴, que do ponto de vista do cálculo do VaR poderiam ser considerados espúrios¹⁵. Contudo, o correlograma dos quadrados dos retornos apresenta-se fora do intervalo de confiança até aproximadamente a 15^a defasagem para o C-Bond, e até a 3^a para Telebrás, demonstrando clara dependência temporal presente no segundo momento da distribuição dos retornos, e rejeitando a hipótese de independência. Em outras palavras, mesmo assumindo inexistência de dependência linear para os retornos, não é possível fazê-lo para seus quadrados.

Como último exercício, construiu-se a tabela 2, que estima os percentis para a distribuição das duas séries, supondo normalidade. Percebe-se que hipótese de normalidade superprediz valores de maior probabilidade (menor perda), e subprediz os de menor probabilidade (maior perda). Fica claro o problema potencial em se assumir normalidade para o cálculo de VaR para esses ativos, principalmente no caso do C-Bond, onde ao nível de significância de 0.1%, o VaR seria violado 7 vezes mais do que o esperado.

Significância	C-BOND		TELEBRÁS	
	Esperado	Efetivo	Esperado	Efetivo
0.1%	1.1	8	1.1	2
0.25%	2.8	11	2.8	4
0.5%	5.6	13	5.6	9
1%	11.2	20	11.3	14
2.5%	28	31	28.2	25
5%	56	48	56.4	42
10%	112	79	112.8	77

Tabela 2: Número de observações nos percentis da cauda inferior da distribuição dos retornos de C-Bond e Telebrás, supondo normalidade.

3.4 Comportamento dos Valores Extremos

Descritas as propriedades estatísticas básicas normalmente analisadas, vale a pena investigar o comportamento dos valores extremos das séries estudadas, as peças de informação essenciais para a modelagem do VaR associado às grandes perdas potenciais. A pergunta mais importante a ser respondida é se os retornos extremos são independentes ao longo da amostra.

¹⁴ Sob a hipótese de retornos i.i.d, o intervalo de confiança é dado pelos limites $\pm \frac{2}{\sqrt{T}} \approx \pm 0.06$.

¹⁵ Pode ser visto para essa série, em Pereira et alii (1999), que mesmo ao se incluir estrutura autoregressiva na média condicional dos retornos, os critérios de informação AIC e BIC mostram que apenas a estrutura GARCH na variância e uma constante na média constituem o melhor modelo.

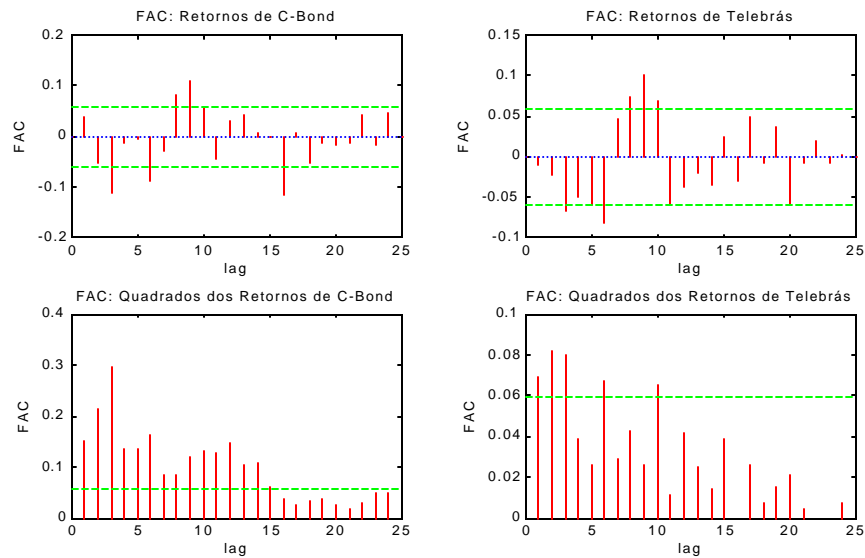


Figura 3

As tabelas 3 e 4, mostram as datas em que as piores realizações foram observadas, juntamente com a magnitude dos retornos, o número de dias entre suas as ocorrências, e os seus *ranks*.

<i>1% dos piores retornos de C-Bond</i>			
Data	Retorno	Dias	Rank
03-Jan-95	-0.06005	-	10
06-Jan-95	-0.08333	3	5
09-Jan-95	-0.05758	1	11
06-Mar-95	-0.06129	35	9
24-Out-97	-0.09848	651	2
20-Ago-98	-0.09091	202	3
26-Ago-98	-0.13015	4	1
09-Set-98	-0.0744	9	8
16-Set-98	-0.07495	5	7
12-Jan-99	-0.08617	78	4
20-Jan-99	-0.07611	5	6

Tabela 3: Valores Extremos de C-Bond

<i>1% dos piores retornos de Telebrás PN</i>			
Data	Retorno	Dias	Rank
05-Set-94	-0.09865	-	8
10-Jan-95	-0.0971	85	9
02-Mar-95	-0.10753	33	4
07-Mar-95	-0.09632	3	10
09-Mar-95	-0.10555	2	5
27-Out-97	-0.16961	652	2
30-Out-97	-0.10343	3	6
27-Ago-98	-0.10947	203	3
03-Set-98	-0.10292	5	7
10-Set-98	-0.17563	4	1
01-Out-98	-0.09564	15	11

Tabela 4: Valores Extremos de Telebrás

Observa-se que um número significativo de ocorrências ocorre dentro de um prazo de 5 dias úteis a partir da observação de uma outra. Isso no mínimo significa que a ocorrência de um evento extremo aumenta a probabilidade de que um outro ocorra nos períodos subsequentes, levando por terra a hipótese de que tais eventos sejam independentes. Esse resultado é interessante porque contradiz o que em geral se encontra na literatura de valores extremos aplicada a Finanças, como em Danielsson e de Vries (1997c). Uma possível explicação para esse efeito é a quantidade de anos disponíveis para análise, de apenas 4 anos.

4 Teoria de Valores Extremos

Entre os avanços recentes de métodos de cálculo de *Value-at-Risk* está o uso da Teoria de Valores Extremos (*Extremal-Value Theory*, doravante EVT). Seu uso permite estimar probabilidades e quantis com razoável precisão nos limites dos valores encontrados dentro da amostra, e mesmo além deles. A

explícita modelagem dos valores extremos corresponde a um ajuste apenas da cauda da distribuição dos dados originais, ressaltando o caráter pouco informativo que pode ter o interior da distribuição para as ocorrências de baixíssima frequência.

4.1 Conceitos Básicos

Por convenção costuma-se apresentar a EVT para o caso dos máximos. Contudo, tudo o que for dito para os máximos serve também para os mínimos bastando lembrar que:

$$\min(X_1, \dots, X_n) = -\max(-X_1, \dots, -X_n)$$

Além disso, é importante reconhecer que dadas as peculiaridades dos valores extremos (máximo e mínimo) de cada problema aplicado, o comportamento de cada um dos extremos deve ser estudado separadamente para cada amostra, isto é, os mínimos podem comportar-se diferentemente dos máximos. No caso específico de controle de risco de uma carteira agregada, o interesse recai apenas sobre as perdas, portanto sobre os mínimos, e não existe razão nenhuma para se impor simetria, como visto na seção 3.

4.1.1 Distribuição dos Máximos

Suponha uma amostra $\mathbf{c}_n = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Chama-se de estatísticas de ordem os elementos de \mathbf{c}_n ordenados de forma que $X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n$. Denotam-se as observações ordenadas, de agora em diante, de *estatísticas de ordem*, da forma $X_{\langle 1 \rangle} \leq X_{\langle 2 \rangle} \leq \dots \leq X_{\langle n \rangle}$.

Denominando-se o máximo amostral por:

$$M_n = X_n \quad \text{e} \quad M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad \text{para } n \geq 2$$

É possível, supondo \mathbf{c}_n i.i.d. escrever-se a distribuição exata do máximo como:

$$\Pr\{M_n \leq x\} = \Pr\{X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\} = \Pr\{X_1 \leq x\} \Pr\{X_2 \leq x\} \dots \Pr\{X_n \leq x\} = F^n(x)$$

onde $F(x) = \Pr\{X \leq x\}$.

O que sugere uma lei de potência para a distribuição do máximo. O resultado central da EVT é enunciado pelo teorema a seguir:

4.1.1.1 Teorema de Fisher-Tippett: Lei de Limite para o Máximo

Suponha (X_n) uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.. Se existem constantes de padronização $c_n > 0$ e $d_n \in \mathfrak{R}$, e alguma distribuição não-degenerada H tal que:

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{d} H,$$

então H pertence a um dos três seguintes tipos de distribuição:

$$\text{Fréchet: } \Phi_a(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0 \\ \exp(-x^{-a}), & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \mathbf{a} > 0$$

$$\text{Weibull: } \Psi_a(x) = \begin{cases} \exp(-x^a), & \text{se } x \leq 0 \\ 1, & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \mathbf{a} > 0$$

Gumbel: $\Lambda(x) = \exp(-e^{-x})$, $x \in \Re$

4.1.1.2 Domínio de Atração do Máximo

Outro conceito bastante importante na EVT, é basicamente a forma reversa de se olhar o teorema anterior. Diz que uma variável aleatória X (ou a distribuição de X) pertence ao domínio de atração do máximo (*maximum domain of attraction*) de H se existirem as constantes $c_n > 0$ e $d_n \in \Re$ que produzam $c_n^{-1}(M_n - d_n) \xrightarrow{d} H$.

4.1.1.3 Distribuição Generalizada do Valor Extremo (GEV)

A pergunta relevante neste ponto deve ser como identificar a correta distribuição do extremo de uma dada amostra, entre as três possíveis. É possível introduzir uma família paramétrica que englobe as três distribuições, e o problema recai simplesmente na estimação do parâmetro de interesse que dará o formato da distribuição:

$$\text{Definindo a família: } H_x = \begin{cases} \Phi_{1/x}, & \text{se } \mathbf{x} > 0 \\ \Lambda, & \text{se } \mathbf{x} = 0 \\ \Psi_{-1/x}, & \text{se } \mathbf{x} < 0 \end{cases}$$

Tem-se que, para qualquer F pertencente ao domínio de atração do máximo de H_x , vale a aproximação: $F^n(c_n x + d_n) \approx H_x$ para a distribuição do extremo

Mais precisamente, conforme *Embrechts et alii. (1997)*, pode-se definir H_x como:

$$H_x(x) = \begin{cases} \exp\{-(1+\mathbf{x}x)^{-1/x}\}, & \text{se } \mathbf{x} \neq 0 \\ \exp\{-\exp(-x)\}, & \text{se } \mathbf{x} = 0 \end{cases} \quad \text{onde } 1+\mathbf{x}x > 0$$

Além disso, é possível substituir-se x na expressão acima pela transformação de escala e locação $\frac{x-\mathbf{m}}{\mathbf{y}}$

com $\mathbf{m} \in \Re$ e $\mathbf{y} > 0$. Dessa forma produz-se a distribuição $H_{x;\mathbf{m}\mathbf{y}} = \exp\left\{-\left(1+\mathbf{x}\frac{x-\mathbf{m}}{\mathbf{y}}\right)^{-1/x}\right\}$

denominada de *GEV (General Extreme Value distribution)*. Todos os casos anteriores estão encaixados dentro da *GEV* com a escolha dos parâmetros $\mathbf{m}\mathbf{y}$ adequados. Uma *Gumbel* pode ser obtida como o caso limite $H_{0;\mathbf{m}\mathbf{y}}$ em que $\mathbf{x} \rightarrow 0$.

É possível ainda estender o resultado acima, de modelagem do máximo, para se obter a densidade conjunta das k estatísticas de ordem superiores a partir de uma *GEV* e cujos parâmetros podem ser estimados por máxima verossimilhança. Basta lembrar que a densidade conjunta das k estatísticas de ordem superiores pode ser escrita como:

$$f_{X_{1,1}, \dots, X_{1,n}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{n!}{(n-k)!} F^{n-k}(x_k) \prod_{i=1}^k f(x_i), \quad x_1 < \dots < x_n$$

Onde:

$f_{X_{1,1}, \dots, X_{1,n}}(x_1, \dots, x_n)$ é a função densidade conjunta das k estatísticas de ordem superiores

$F(x_k)$ é a função distribuição de x_k

$f(x_i)$ é a função densidade de x_i

4.1.2 Estimação no Domínio de Atração do Máximo

Ao invés de se assumir que os máximos provém de uma $H_{x;my}$, pode-se relaxar essa hipótese para que os $X_j = \max(X_1^{(j)}, \dots, X_s^{(j)})$ observados sejam i.i.d., mas agora provenientes de uma distribuição F que pertença ao domínio de atração do máximo de H_x .

4.1.2.1 Estimador de Hill para $\mathbf{x} = 1/\mathbf{a} > 0$

Suponha uma amostra X_1, \dots, X_n de variáveis aleatórias i.i.d. cuja distribuição F pertence ao domínio de atração do máximo de uma Fréchet¹⁶. Nesse caso, é possível mostrar que F tem a forma: $F(x) = x^{-a} L(x)$, $x > 0$ se $L(x)$ é uma *função de baixa variação*¹⁷.

O parâmetro \mathbf{a} é conhecido como *índice de caudas (tail index)*, ou *índice de variação regular (regular variation index)* e é de fundamental importância para muitas aplicações. Ele dá por exemplo o maior número de momentos finitos existentes. Por exemplo, se $\alpha < 2$, o segundo momento de X não está definido, i.e., $EX^2 = \infty$. Resultados típicos para estimativas desse parâmetro em séries financeiras de retornos diários estão entre 3 e 4.

O *estimador de Hill* pode ser obtido como o estimador de máxima verossimilhança¹⁸, bastando para isso supor a função $L(x) = C$ (constante), e a função distribuição $F(x)$ válida para um domínio onde $x > u > 0$, com $u = X_{k,n}$. Os estimadores MLE para \mathbf{a} e C , condicionais a um valor de k , e para uma amostra de tamanho n , são dados por:

$$\hat{\mathbf{a}}_{k,n} = \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_{j,n} - \ln X_{k,n} \right)^{-1} \text{ e } \hat{C} = \frac{k}{n} (X_{k,n})^{\hat{\mathbf{a}}_{k,n}}$$

Além disso, o estimador das caudas da distribuição segue naturalmente como:

$$\hat{F}(u) \approx \frac{k}{n} \left(\frac{x}{X_{k,n}} \right)^{-\hat{\mathbf{a}}_{k,n}} \text{ e para os quantis, } \hat{x}_p = \left(\frac{n}{k} (1-p) \right)^{-1/\hat{\mathbf{a}}_{k,n}} X_{k,n}$$

¹⁶ A hipótese de que F pertence ao domínio de atração do máximo de uma Fréchet, e portanto de que $\mathbf{x} > 0$, parece um tanto quanto restritiva. Contudo nas aplicações de Finanças e de Seguros, ξ é positivo, e esse pressuposto não representa maiores problemas.

¹⁷ Uma função de baixa variação (*slowly varying function*) é definida como uma função L mensurável, positiva, de domínio $(0, \infty)$ se $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$, $t > 0$. Uma função F de variação regular no infinito (*regularly varying function at infinity*) de

índice \mathbf{a} é aquela que obedece a: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(tx)}{F(x)} = t^{\mathbf{a}}$, $t > 0$

¹⁸ O estimador supõe k conhecido, e portanto é condicional a sua estimativa. Também é possível obter o estimador de Hill através da maximização da verossimilhança da densidade conjunta das k estatísticas de ordem superiores (explicitada na seção 4.1.3). Outras abordagens ainda podem ser encontradas em Embrechts et alii (1997).

É possível obter consistência fraca no caso de (X_n) ser uma sequência de variáveis aleatórias i.i.d.¹⁹: para $k \rightarrow \infty$ e $k/n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ obtém-se $\hat{\mathbf{a}}_{k,n}^p \rightarrow \mathbf{a}$. Sob restrições adicionais, também é possível obter consistência forte (convergência quase-certa), e ainda normalidade assintótica.

Outros estimadores para o índice de caudas também estão disponíveis, como o estimador de Pickands, ou estimador de Deckers-Einmahl-de Haan, que permite $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}$. Contudo são menos utilizados. Kearns & Pagan [1997] comparam os estimadores de Pickands, Hill, e de Hann para amostras não i.i.d. através de simulações de Monte-Carlo, e mostram que o estimador de Hill desempenha melhor nesse tipo de situação, geralmente o caso em Finanças. Diebold (1998), também só utiliza o estimador de Hill. Como o foco deste trabalho é a estimação das caudas, e não do índice de caudas, também se utilizará apenas o estimador de Hill, seguindo os resultados de Kearns & Pagan (1997).

4.1.2.2 Escolha do número de estatísticas de ordem k

O estimador de Hill depende do valor de k , a última estatística de ordem utilizada. Nesse caso, k determina um ponto de corte ótimo onde deveria iniciar a cauda da distribuição e, portanto, a partir de onde a EVT se torna válida para descrever a cauda da distribuição.

Não existe consenso na literatura sobre a forma mais adequada de se escolher o valor de k . Mais ainda, a estimativa do índice de caudas é altamente sensível à escolha de k , principalmente em amostras consideradas pequenas. Isso se deve ao fato de que existe um *trade-off* entre viés e variância do estimador devido à escolha de k . A variância do estimador cai com o aumento do tamanho da amostra, e o conseqüente aumento de k . Contudo também é possível mostrar a existência de um viés, crescente com a escolha de k . Isso implica que, ao aumentar-se o valor de k , simultaneamente, aumenta-se o viés e reduz-se a variância do estimador de Hill, sugerindo que deve haver um ponto ótimo k^* entre viés e variância.

Para resolver o problema de encontrar o k^* ótimo, duas alternativas são mais utilizadas. A primeira consiste num método gráfico, como sugerido em *Embrechts et alii* (1997), e a segunda, sugerida por *Hall* (1990), lança mão de um procedimento de *bootstrap* iterativo.

O método gráfico consiste em se traçar o gráfico conhecido como *Hill-plot* e procurar a região mais próxima das caudas onde o valor do índice de caudas estimado se estabiliza. O gráfico é constituído dos pares $\{(k, \hat{\mathbf{a}}_{k,n}^{(H)}) : k = 1, \dots, n\}$. A intuição é que à medida que um k maior é escolhido, avança-se em direção ao interior da distribuição e menos peso é dado às observações da cauda, o real interesse da modelagem. Contudo, um valor pequeno de k incorpora muito poucas observações extremas e produz um estimador com elevada variância. No meio desse caminho, deve haver algum valor de k que aproxima a taxa à que o viés aumenta da taxa à que a variância decresce, refletindo-se em um patamar no gráfico. Nem sempre isso é facilmente identificável. A figura 4 mostra o gráfico *Hill-plot* para a cauda inferior da série de retornos de C-Bond (1121 observações). Observa-se que um valor em torno de 30, ou de 70 parece ser adequado. Há dúvidas pois existem dois patamares. Como $k = 70$ representa cerca de 7% das observações da amostra é conveniente optar pela parcimônia e escolher $k^* = 30$. A distribuição ajustada para a cauda inferior da série de C-Bond se encontra na figura 5. Observa-se que o resultado parece bastante bom principalmente para as piores perdas, ou menores probabilidades.

¹⁹ Essa hipótese pode ser relaxada, por exemplo, para (X_n) um processo linear. *Embrechts et alii* (1997)

A partir do diagnóstico da existência do *trade-off* entre viés e variância foi possível a *Hall (1990)* formalizar a idéia do item (a) em termos de uma função perda, o erro quadrático médio²⁰ (MSE), que poderia ser minimizada para escolha de um k^* ótimo. Essa idéia foi operacionalizada por *Danielson e de Vries, 1997b*, através de um procedimento de *bootstrap* iterativo. Foi implementada pelos autores do presente artigo em *Souza, 1999*. Porém, como a experiência mostrou que, para as séries de C-Bond e Telebrás, o método não apresentou resultados confiáveis, optou-se por ficar com a metodologia do Hill-Plot.

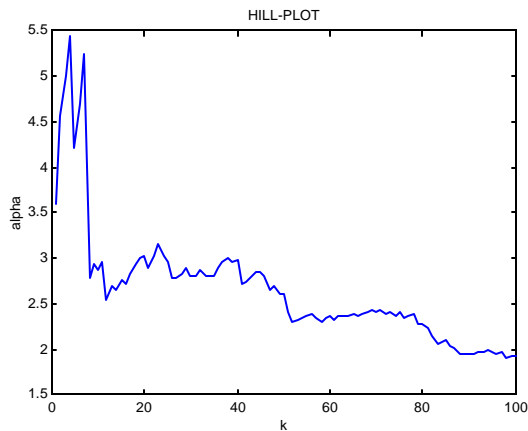


Figura 4: Hill-plot para cauda inferior da série de C-Bond

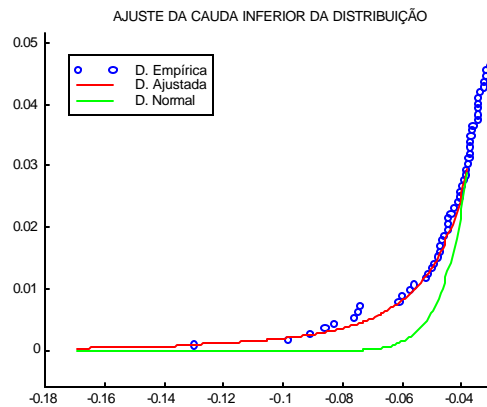


Figura 5: Cauda inferior ajustada de C-Bond

4.2 Estimação de Value-at-Risk através da EVT

A teoria de valores extremos vista até aqui parece bastante indicada para a estimação de quantis e probabilidades, e portanto de *VaR*, para as caudas da distribuição dos retornos. Duas questões surgem de imediato: a) o que é cauda e o que é interior da distribuição; b) o que fazer no caso de medidas de *VaR* com níveis de significância mais altos (e portanto níveis de confiança mais baixos) que avancem no interior da distribuição, onde a EVT, em princípio, não desempenha tão bem como outros métodos tradicionais.

A resposta de (a) está na escolha ótima de k que, como visto acima, não é uma tarefa livre de controvérsias. A partir de um k , a EVT é capaz de dizer a partir de que nível de probabilidade a aproximação das caudas passa a valer.

Com relação a (b) a resposta foi dada por um dos artigos da série de *Danielson e De Vries (1997c)*, em que propõem uma solução semi-paramétrica. A idéia é utilizar a simulação histórica no interior da distribuição e a estimação paramétrica, dada pela EVT, nas caudas da distribuição.

4.2.1 Estimação Semi-Paramétrica de VaR

O método semi-paramétrico, desenvolvido por *Danielsson e de Vries (1997a)*, consiste basicamente no uso do método de simulação histórica para observações²¹ entre $X_{k^{INF}+1} < x < X_{k^{SUP}-1}$ e de $\hat{F}(x)$ em

²⁰ O erro quadrático médio de um estimador \hat{q} , é dado por $MSE(\hat{q}) = E\{[(\hat{q} - q)]^2\}$, e pode ser decomposto na soma do quadrado do viés com a variância do estimador.

²¹ Do ajuste da cauda inferior sai o k^{INF} , o ponto de corte ótimo das estatísticas de ordem. O ajuste da cauda superior, se

caso contrário. Como no presente artigo os valores de k nunca foram inferiores a 5%, o maior nível de significância de VaR calculado na seção 5, não foi necessário o uso do procedimento semi-paramétrico, que pode ser encontrado em detalhes em Souza, 1999.

4.2.2 Extensão para Carteiras

Essa metodologia pode ser estendida para carteiras de duas maneiras, conhecidas por *pré-amostragem*, e por *pós-ajustamento*. No método de *pré-amostragem*, trata-se a série de cada ativo (ou fator de risco) individualmente, pela metodologia descrita em 4.2.1, e faz uma transformação na matriz de covariâncias dos retornos ajustados, para que reproduzam a estrutura de covariâncias original dos retornos²². No método de *pós-ajustamento*, constrói-se uma série com os retornos históricos da carteira, aos pesos (constantes) do momento atual, e aplica-se a metodologia 4.2.1 na série resultante. Danielson e de Vries 1997c mostram que não há ganho significativo de uma metodologia sobre a outra, e nesse caso recomenda-se o método de *pós-ajustamento*, por simplicidade.

5 Aplicação às Séries Brasileiras

Certamente uma das questões mais complexas que diz respeito à implementação de sistemas de *Value-at-Risk* relaciona-se à validação e discriminação entre metodologias alternativas. Vários fatores contribuem para isso: o VaR não é uma quantidade observável, existe um *trade-off* entre a quantidade de informação utilizada na estimação e o tamanho da amostra que sobra para validação, e resta a questão de se a comparação deve levar em conta apenas a frequência relativa de violações, ou também ou perda absoluta.

5.1 Teste de Validação

Entre as medidas de validação mais utilizadas estão o intervalo de confiança para os retornos, e a frequência relativa de sua violação. Neste artigo, utilizou-se um teste de razão de verossimilhança (LR) para a proporção de violações²³.

De longe este é o método mais largamente utilizado. Trata-se de se estimar um VaR para o nível de significância desejado, e verificar quantas vezes ele é superado fora da amostra. Quanto mais próxima for a frequência de superação da probabilidade efetiva para a qual o VaR foi estimado, melhor é o modelo. Contudo, o comportamento em geral observado nas metodologias tradicionais é o de que o VaR é superado mais vezes, quanto mais próximo se estiver ao extremo da distribuição (menores probabilidades). Como são esses os piores casos, das maiores perdas, é justamente aí que as atenções deveriam se concentrar.

Fora da amostra espera-se que cada observação tenha probabilidade α de superar o VaR. Isso implica uma distribuição de Bernoulli para uma variável aleatória X_t , que assume valor 1 caso o VaR seja superado, e 0 em caso contrário. O valor esperado de X_t é α [$E(X_t) = \alpha$]. Se são observadas T realizações de X_t , e estas são assumidas independentes²⁴, então o valor esperado para X num horizonte

aplicável, deve ser feito separadamente, e produzirá um k^{SUP} , que pode ou não ser o mesmo de k^{INF} .

²² Para maiores detalhes sobre a metodologia, ver Souza 1999.

²³ Uma das alternativas sugeridas em Christoffersen, 1998.

²⁴ A violação do VaR em um dia é independente da violação do VaR em qualquer outro. É uma hipótese forte, mas que faz sentido se não houver erros sistemáticos na estimação do VaR.

T , é $E(X_T) = \sum_{t=1}^T E(X_t) = T\mathbf{a}$, simplesmente o número de observações vezes o nível de significância do VaR. $X_T = \sum_{t=1}^T X_t$ possui distribuição binomial de média $T\mathbf{a}$ e variância $T\mathbf{a}(1 - \mathbf{a})$.

O teste de razão de verossimilhança testa o modelo binomial, com a proporção de violações dada pela hipótese nula de o nível de significância ser o nominal do VaR ($p=\alpha$), contra o modelo onde α é dado pela proporção efetivamente observada ($p = \hat{p}$). A estatística do teste possui distribuição qui-quadrado com 1 grau de liberdade:

$$LR = -2 \ln[(1 - \mathbf{a})^{(1-\hat{p})T} \mathbf{a}^{\hat{p}T}] + 2 \ln[(1 - \hat{p})^{(1-\hat{p})T} \hat{p}^{\hat{p}T}] \sim \chi^2(1)$$

5.2 Resultados Empíricos

A seguir encontram-se os resultados dos valores em risco estimados para as 2 séries financeiras estudadas na seção. Para cada uma das séries, o VaR foi calculado de seis maneiras diferentes: a) IC – intervalo de confiança normal; b) HS – simulação histórica; c) EWMA – *Riskmetrics*TM; d) GARCH(1,1) condicionalmente gaussiano; e) GARCH(1,1) condicionalmente *t-Student*; f) Teoria do Valor Extremo.

As medidas de desempenho são baseadas no confronto do valor em risco estimado com base numa amostra crescente²⁵, que sempre incorpora desde a primeira até a observação imediatamente anterior à que se está calculando VaR, e confrontando com os retornos realizados no mercado.

5.3 Série de Retornos de C-Bond

A escolha do número adequado de estatísticas de ordem, para a modelagem por EVT, foi $k^* = 40$. Os resultados das estimações para as diversas metodologias estão na tabela 5. O VaR de cada dia é estimado com base numa amostra que vai até a observação anterior ao dia em questão.

Sobre esse procedimento, dois detalhes merecem comentários: a) por uma questão de tempo computacional os modelos GARCH foram reestimados apenas a cada 50 períodos, mantendo-se os parâmetros constantes nesse intervalo. Assim, o VaR previsto para as observações entre 561 e 610 utiliza os parâmetros estimados com uma amostra que vai até a observação 560. O VaR previsto para as observações entre 611 e 660 utiliza os parâmetros estimados com uma amostra que vai até a observação 610, e assim por diante. b) o valor de k^* inicialmente utilizado é o de 40, para a amostra de 560 observações. À medida que cresce o tamanho da amostra, o valor de k^* é corrigido para manter uma proporção constante com o logaritmo do número de observações, que é a taxa à qual assintoticamente cresce o valor do parâmetro.

Na tabela 5, verifica-se que os piores modelos para cálculo de VaR foram o IC e o EWMA. As previsões do IC são rejeitadas para todos os níveis de significância menores ou iguais a 1%, e do

²⁵ O problema com esta metodologia é o fato de que o erro de previsão possui variância decrescente com o tamanho da amostra, isto é, ao longo do procedimento de validação. Em Souza, 1999, o mesmo procedimento é feito para um tamanho de amostra fixo, e não apresenta resultados significativamente diferentes para as mesmas séries. Além disso, mostra-se através de simulação que o procedimento de amostra crescente é mais apropriado para esse caso específico de validação.

EWMA para as menores de 5%. Como segundo grupo, apresentam-se os GARCHs, cujos resultados são estatisticamente indistinguíveis entre o modelo com distribuição *t-Student* e o com distribuição Normal. As previsões de ambos são rejeitadas até 0.5%, e pode-se considerá-los os melhores modelos para os níveis de 2.5% e 5% de significância.

		<i>Série de Retornos de C-Bond, 1120 observações</i>					
		Nível de Significância					
		0.10%	0.25%	0.50%	1.00%	2.50%	5.00%
	<i>Número de dias esperado</i> ²⁶	0.56	1.4	2.8	5.6	14	28
IC Normal	<i>número de dias</i> ²⁷	7	10	10	16	20	26
	<i>frequência</i> ²⁸	1.25%	1.79%	1.79%	2.86%	3.57%	4.64%
	<i>teste LR</i> ²⁹	0.0000	0.0000	0.0008	0.0003	0.1266	0.6948
Simulação Histórica	<i>número de dias</i>	2	3	7	10	18	30
	<i>frequência</i>	0.36%	0.54%	1.25%	1.79%	3.21%	5.36%
	<i>teste LR</i>	0.1366	0.2405	0.0347	0.0924	0.2994	0.7013
EWMA	<i>número de dias</i>	9	10	11	14	27	35
	<i>frequência</i>	1.61%	1.79%	1.96%	2.5%	4.82%	6.25%
	<i>teste LR</i>	0.0000	0.0000	0.0002	0.0027	0.0018	0.1907
GARCH Normal	<i>número de dias</i>	7	7	8	11	17	31
	<i>frequência</i>	1.25%	1.25%	1.43%	1.96%	3.04%	5.54%
	<i>teste LR</i>	0.0000	0.0007	0.0111	0.0427	0.4319	0.5671
GARCH t-Student	<i>número de dias</i>	7	7	9	10	16	32
	<i>frequência</i>	1.25%	1.25%	1.61%	1.79%	2.86%	5.71%
	<i>teste LR</i>	0.0000	0.0007	0.0032	0.0924	0.5965	0.4478
Valor Extremo	<i>número de dias</i>	1	3	7	10	20	29
	<i>frequência</i>	0.18%	0.54%	1.25%	1.79%	3.57%	5.18%
	<i>teste LR</i>	0.59671	0.24054	0.0347	0.09244	0.12664	0.8471

Tabela 5: Resultados para a Série de C-Bond.

Para os níveis de significância entre 0.1% e 1%, os melhores modelos foram a HS e a EVT. Pode-se dizer que os resultados da EVT foram sempre melhores ou iguais aos da HS. Tanto a EVT quanto a HS apenas são rejeitadas pelo teste LR ao nível de significância de 0.5%, porém todos os modelos também o são. Em seguida vem a HS, que também tem suas previsões rejeitadas pelo teste LR até o nível de 0.5%. Para $\alpha = 2.5\%$, os modelos GARCH foram melhores, e para 5% a EVT foi melhor. De toda forma, os resultado da EVT para $\alpha > 1\%$ deveriam ser sempre olhados com reservas para esse tamanho de amostra.

5.4 Série de Retornos de Telebrás

Com base no gráfico de Hill-Plot, e na experiência na modelagem dessa série³⁰, escolheu-se o número de estatísticas de ordem utilizadas como $k^* = 40$. Na tabela 6 estão os resultados da estimação de VaR

²⁶ Número de violações esperadas para o nível de significância considerado, em função do tamanho da amostra de validação.

²⁷ Número de dias em que o VaR foi violado dentro da amostra de validação.

²⁸ Frequência relativa das violações, i.e., o nível de significância efetivo observado no teste de validação.

²⁹ *P-value* da estatística qui-quadrado do teste LR.

utilizando amostra crescente para validação. O primeiro resultado a chamar a atenção é o fato de que ambos modelos GARCH, EWMA e IC têm suas violações de VaR rejeitadas pelo teste LR para níveis de significância inferiores ou iguais a 0.5%. Nesse caso, o melhor modelo foi a EVT, e o segundo melhor foi a HS.

A HS é o método que melhor descreve o percentil de 1%, e qualquer um dos GARCHs são os melhores modelos para os níveis de significância de 2.5% e 5%. Observa-se que os resultados para o EWMA são sempre ligeiramente piores ou iguais aos resultados dos GARCHs. A quase nenhuma diferença entre o GARCH Normal e o GARCH-t se explica pelo elevado valor dos graus de liberdade da distribuição *t-Student* das inovações (em geral maior $\nu > 10$). Também fica difícil de distinguir estatisticamente os resultados desses dois modelos contra o EWMA.

		Série de Retornos de Telebrás, 1128 observações					
		Nível de Significância					
		0.10%	0.25%	0.50%	1.00%	2.50%	5.00%
<i>Número de dias esperado</i>		0.56	1.41	2.82	5.64	14.1	28.2
IC Normal	<i>número de dias</i> ⁵	3	5	8	12	20	29
	<i>frequência</i> ⁶	0.53%	0.89%	1.42%	2.12%	3.55%	5.14%
	<i>teste LR</i> ⁷	0.02303	0.019	0.0116	0.01931	0.13398	0.87771
Simulação Histórica	<i>número de dias</i>	2	3	5	8	21	33
	<i>frequência</i>	0.36%	0.53%	0.89%	1.42%	3.72%	5.85%
	<i>teste LR</i>	0.13845	0.24447	0.24087	0.34741	0.08237	0.36595
EWMA	<i>número de dias</i>	7	7	7	13	18	26
	<i>frequência</i>	1.24%	1.24%	1.24%	2.31%	3.19%	4.61%
	<i>teste LR</i>	0.0000	0.0008	0.0360	0.0078	0.3128	0.6669
GARCH Normal ³	<i>número de dias</i>	6	7	8	10	17	26
	<i>frequência</i>	1.06%	1.24%	1.42%	1.77%	3.01%	4.61%
	<i>teste LR</i>	0.0000	0.0008	0.0116	0.0962	0.4484	0.6669
GARCH t-Student ³	<i>número de dias</i>	6	8	8	10	18	26
	<i>frequência</i>	1.06%	1.42%	1.42%	1.77%	3.19%	4.61%
	<i>teste LR</i>	0.0000	0.0001	0.0116	0.0962	0.3128	0.6666
Valor Extremo ⁴	<i>número de dias</i>	1	2	3	10	22	34
	<i>frequência</i>	0.18%	0.36%	0.53%	1.77%	3.9%	6.03%
	<i>teste LR</i>	0.6008	0.63992	0.9153	0.0962	0.0486	0.2770

Tabela 6: Resultados para a Série de Telebrás PN.

A EVT se mostra realmente como o melhor modelo ao acessar as frequências de violação de 0.18%, 0.36% e 0.53% para os níveis nominais de 0.1%, 0.25%, e 0.5%. Os GARCHs mostram-se a modelagem mais adequada para os níveis de significância de 2.5% e 5%. A surpresa é o IC normal como melhor modelo para o VaR(5%). A HS é o segundo melhor modelo para os baixos níveis de significância, apesar de errar bastante no 0.1% que estava fora da amostra.

³⁰ Ver Souza, 1999.

Apesar de não ser grande o número de observações disponíveis para validação, são importantes as conclusões que se pode depreender a partir da modelagem dessas séries, e que vão na direção dos resultados obtidos por simulação, e para outras séries em Souza, 1999:

- 1) A modelagem não condicional da EVT se mostra bastante apropriada para a estimação de VaR de baixos níveis de significância, no caso, de 1% ou inferiores.
- 2) A modelagem condicional dos GARCHs é mais indicada para níveis de significância mais altos, do tipo 2.5% ou 5%.
- 3) Os resultados dos modelos EWMA são ligeiramente inferiores aos dos GARCHs.
- 4) A HS é uma boa alternativa de modelagem para baixos níveis de significância (não menores do que 1%), no que se refere ao custo-benefício de implementação.

5.5 Perdas Esperadas

A maioria dos trabalhos aplicados considera apenas o número de violações das estimativas de VaR vis-à-vis os retornos observados, e desconsidera a magnitude das perdas realizadas. O fato é que para se avaliar as perdas esperadas são necessárias hipóteses fortes à respeito da distribuição dos retornos. Por exemplo, se os retornos seguirem uma distribuição normal, é possível calcular-se a perda média dos $\alpha\%$ piores resultados, e confrontá-la com a dada pela distribuição em questão. Supondo-se normalidade condicional para os retornos, e média não condicional, nula, a idéia pode ser formalizada como:

$$E\left[\frac{r_t}{\mathbf{s}_t} \middle| \frac{r_t}{\mathbf{s}_t} < Z_a\right] = -\frac{f(Z_a)}{F(Z_a)} \Rightarrow E[r_t | r_t < \mathbf{s}_t Z_a] = -\mathbf{s}_t \frac{f(Z_a)}{F(Z_a)}$$

Onde: $f(\bullet)$ = f. densidade de uma $N(0,1)$
 $F(\bullet)$ = f. distribuição de uma $N(0,1)$
 Z_a = quantil de $\alpha\%$ de uma $N(0,1)$

É possível a derivação do mesmo resultado para a metodologia de valores extremos. A esperança da perda em caso de violação do VaR pode ser escrita como:

$$E(R | R < VaR^*) = \int_{-\infty}^{VaR^*} r dF(r | r < VaR^*) = \frac{1}{F(VaR^*)} \int_{-\infty}^{VaR^*} r dF(r)$$

Supondo-se que a cauda da distribuição dos retornos (i.e. para um x grande) possa ser aproximada assintoticamente por uma distribuição do tipo Pareto ($F(x) = 1 - Cx^{-a}$), como é o caso das distribuições de caudas pesadas, encontra-se como resultado da integral acima:

$$E(R | R < VaR^*) = \frac{a VaR^*}{a - 1}$$

Analogamente é possível se obter o resultado o excesso de perda sobre o VaR*:

$$E(R - VaR^* | R < VaR^*) = \frac{VaR^*}{a - 1}$$

A fim de se adquirir algum *insight* adicional a respeito desses resultados de perdas esperadas dadas pela EVT, e das perdas médias observadas, construíram-se as tabelas 7 e 8 a seguir. Elas comparam as perdas esperadas dadas pela HS e pela EVT³¹ contra as perdas médias empiricamente observadas para as duas séries estudadas nesse capítulo. Todos os resultados são baseados nos cálculos de VaR feitos com base na primeira metade da amostra, e validados contra a segunda. Os melhores modelos são escolhidos de acordo com a menor diferença absoluta entre a perda esperada (prevista), e a média observada (realizada). Todas as perdas são dadas em termos de retornos.

³¹ Foram escolhidos apenas esses dois modelos por terem sido os melhores na estimativa de VaR para os níveis mais baixos de significância. Além disso, não é possível se tratar analiticamente as perdas esperadas não condicionais dadas pelos modelos GARCH.

Para o caso da série de C-Bond (tabela 7) a HS desempenhou melhor nos níveis de significância de 0.25% e 0.5%. Para 1%, 2.5% e 5% a EVT se saiu melhor. No cômputo geral, pode-se dizer que o desempenho da EVT foi melhor, inclusive porque a HS não é capaz de estimar a perda esperada de 0.1%.

No caso da série de Telebrás PN (tabela 8) foi a EVT que se saiu incondicionalmente melhor. É importante observar que, no caso dos níveis de significância que estão fora da amostra, como o 0.1% nas tabelas 7 e 8, a HS não tem como estimar a perda esperada. Nesse caso apenas a EVT pode fazer previsões.

Série de C-Bond

		0.1%	0.25%	0.5%	1%	2.5%	5%
Perda Média	<i>HS</i> previsto	-	0.0833	0.0723	0.0637	0.0516	0.0431
	<i>HS</i> realizado	0.1014	0.0902	0.0902	0.0854	0.0613	0.055
	<i>EVT</i> previsto	0.2470	0.1688	0.1266	0.0949	0.0649	0.0486
	<i>EVT</i> realizado	-	0.1302	0.0902	0.0902	0.0613	0.0522
melhor modelo		-	HS	HS	EVT	EVT	EVT
Excesso de Perda	<i>HS</i> previsto	-	0.0198	0.0130	0.0126	0.0130	0.0134
	<i>HS</i> realizado	0.0194	0.0267	0.0309	0.0342	0.0227	0.0252
	<i>EVT</i> previsto	0.1026	0.0701	0.0526	0.0394	0.0269	0.0202
	<i>EVT</i> realizado	-	0.0315	0.0162	0.0347	0.0234	0.0238
melhor modelo		-	HS	HS	EVT	EVT	EVT

Tabela 7: Perdas esperadas para Série de C-Bond

Série de Telebrás PN

		0.1%	0.25%	0.5%	1%	2.5%	5%
Perda Média	<i>HS</i> previsto	-	0.1075	0.1065	0.1010	0.0865	0.0719
	<i>HS</i> realizado	0.1516	0.1516	0.1322	0.1212	0.0934	0.0797
	<i>EVT</i> previsto	0.2977	0.2164	0.1701	0.1336	0.0972	0.0763
	<i>EVT</i> realizado	-	0.1726	0.1726	0.1171	0.0908	0.0788
melhor modelo		-	EVT	EVT	EVT	EVT	EVT
Excesso de Perda	<i>HS</i> previsto	-	0.0018	0.0084	0.0120	0.0204	0.0211
	<i>HS</i> realizado	0.0442	0.0459	0.0341	0.0322	0.0273	0.0289
	<i>EVT</i> previsto	0.1036	0.0753	0.0592	0.0465	0.0338	0.0265
	<i>EVT</i> realizado	-	0.0315	0.0617	0.0300	0.0275	0.0290
melhor modelo		-	EVT	EVT	EVT	EVT	EVT

Tabela 8: Perdas esperadas para Série de Telebrás PN

6 Conclusões

A principal proposta deste trabalho foi investigar a metodologia mais adequada para a estimação de *Value-at-Risk* para séries financeiras, principalmente sob a ótica de eventos extremos que recentemente abalaram os mercados financeiros internacionais e, de maneira ainda mais aguda, os mercados emergentes. Os resultados obtidos deixam claro que o uso da EVT para o cálculo de VaR de situações atípicas, ou de *stress*, é bastante apropriado, e que o uso de alguma modelagem condicional do tipo GARCH para o “dia-a-dia”, ou para os níveis de significância mais elevados, do tipo 2.5% e 5% é bem

indicado. Além disso, no que se refere aos modelos GARCH, o uso do GARCH-t não parece trazer ganhos significativos sobre o GARCH Normal na estimação de VaR fora da amostra.

Foi feito um esforço empírico considerável para se avaliar o desempenho de modelos de VaR alternativos de acordo com sua habilidade na estimação das perdas esperadas, em caso de violação do valor em risco. O resultado foi que a EVT parece se constituir uma alternativa bastante razoável quando não se conhece a distribuição dos retornos.

Por fim, também vale a sugestão de se realizar o mesmo trabalho para carteiras de ativos, e verificar se o fato de se agrupar um maior conjunto de ativos afeta de alguma forma os resultados obtidos com o uso dessas técnicas mais sofisticadas.

7 Referências Bibliográficas

- Bollerslev, T.R., Y. Chou, K. F. Kroner; 1992. "ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence". *Journal of Econometrics* 52 (1992), 5-60.
- Christoffersen, P. F. 1998. "Evaluating Interval Forecasts". *International Economic Review*. Vol. 39. No. 4, November 1998.
- Danielsson, Jon; Casper G. de Vries. 1997a. "Beyond the sample: Extreme quantile and probability estimation." Mimeo, Tinbergen Institute Rotterdam.
- Danielsson, Jon; Casper G. de Vries. 1997b. "Value-at-Risk and Extreme Returns" Mimeo, Tinbergen Institute Rotterdam.
- Danielsson, Jon; Casper G. de Vries. 1997c. "Tail index and quantile estimation with very high frequency data". *Journal of Empirical Finance* 4:241-257
- Danielsson, Jon; Phillip Hartmann; Casper G. de Vries. 1997. "The Cost of Conservatism: Extreme Returns Value-at-Risk, and the Basle 'Multiplication Factor'". Mimeo. London School of Economics.
- De Vries, C. G.; Hols, M. C. A. B.; 1991. "The Limiting Distribution of Extremal Exchange Rate Returns". *Journal of Applied Econometrics*. Vol. 6. 287-302 (1991)
- Diebold, F. X.; Schuermann, T.; Stroughair, J. D.; 1998. "Pitfalls and Opportunities in the Use of Extreme Value Theory in Risk Management". The Wharton School. *Working Paper*. October 1998.
- Embrechts, P.; Klüppelberg, C.; Mikosch, T. 1997. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer
- Hall, P. 1990. "Using the bootstrap to estimate mean squared error and select smoothing parameter in nonparametric problems." *Journal of Multivariate Analysis*, 32:177-203.
- J.P. Morgan. 1997. *RiskMetrics-technical manual*. Fourth ed.
- Jorion, Philippe. 1997. *Value-at-Risk*. Irwin.
- Kearns, P.; Pagan, A. R. 1997. "Estimating the Tail Density Index for Financial Time Series", *Review of Economics and Statistics*, 79, 171-175
- Müller Ulrich A.; Dacorogna, Michel M.; Pictet, Olivier V.. 1996. "Hill, Bootstrap and Jackknife Estimators for Heavy Tails". *Working Paper*.
- Pereira, P. L. V.; Hotta, L. K.; Souza, L. A. R.; Almeida, N. M. C. G. 1999. "Modelos Alternativos para Extração da Volatilidade de Ativos: um Estudo Comparativo". a ser publicado na *Revista de Econometria*
- Souza, L. A. R.; 1999. *Valor em Risco em Épocas de Crise*. Dissertação de mestrado. FEA-USP.